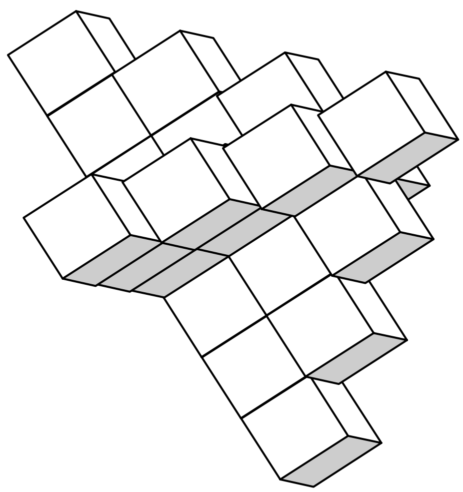
BAHAN AJAR

DIKLAT GURU MATEMATIKA

Barisan dan Deret



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
2005

DAFTAR ISI

Peta Kompetensi

1. Kompetensi:

   Mengembangkan ketrampilan siswa dalam merumuskan model dan menerapkan notasi sigma, barisan dan deret dalam pemecahan suatu masalah.

2. Indikator :

   - Petatar mampu menjelaskan notasi sigma, memberikan contohnya dan mengembangkannya dalam kehidupan nyata sehari-hari.
   - Petatar mampu menjelaskan barisan dan deret, memberikan contohnya dan mengembangkannya dalam kehidupan nyata sehari-hari.
   - Petatar mampu menjelaskan deret geometri, memberikan contohnya dan mengembangkannya dalam kehidupan nyata sehari-hari

3. Materi :

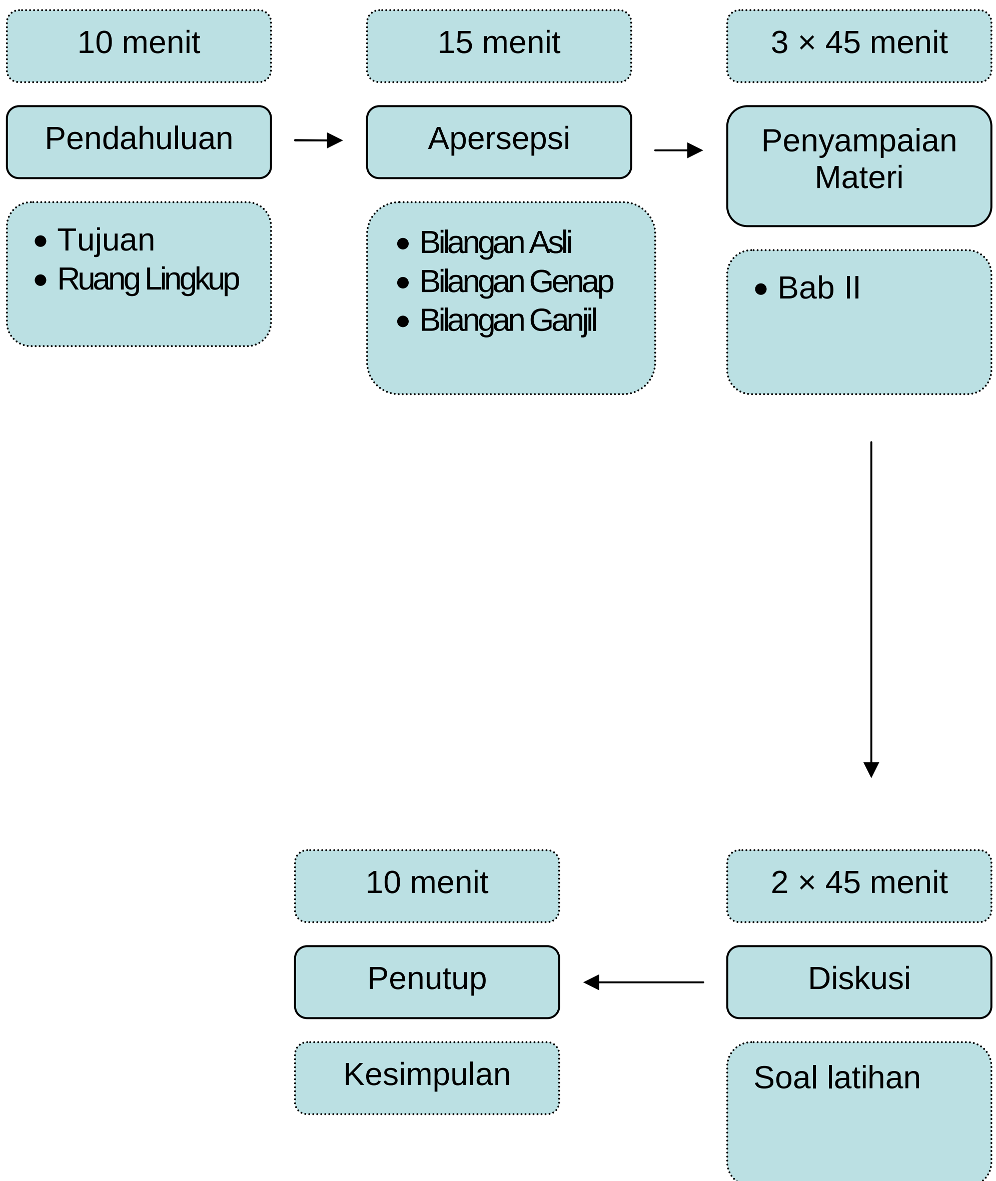
   - Notasi Sigma
   - Barisan dan Deret Aritmetika
   - Barisan dan Deret Geometri

Apersepsi

- Bilangan Asli
- Bilangan Genap
- Bilangan Ganjil
- Bentuk Pangkat

Skenario Pembelajaran

Salah satu skenario pembelajaran yang dapat dilakukan:



BAGIAN I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Penggunaan notasi sigma sebagai penyederhanaan bentuk penjumlahan yang panjang sangat menghemat waktu dan tenaga. Sebagai dasar untuk penulisan deret maka penggunaan notasi sigma beserta sifat-sifatnya menjadi sangat penting untuk dipelajari.

Barisan dan deret yang disajikan meliputi pengertian tentang barisan dan deret, barisan dan deret aritmetika serta barisan dan deret geometri. Perhitungan bunga bank, penyusutan nilai barang, merupakan salah satu contoh penerapan dari barisan dan deret dalam bidang ekonomi.

Tidak ketinggalan pula dibahas tentang konsep awal notasi sigma, barisan dan deret untuk mengingatkan kembali bahwa matematika berkembang dari hal-hal sederhana yang kemudian berlanjut ke hal-hal yang lebih kompleks.

B. Tujuan

Bahan ajar ini disusun dengan tujuan untuk mengingatkan kembali guru tentang materi dasar dalam pembelajaran Notasi Sigma, Barisan dan Deret Bilangan. Bahan ajar ini nmerupakan bahan acuan dalam diklat berjenjang tingkat dasar untuk guru-guru SMK NON TEKNIK.

C. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas dalam bahan ajar ini adalah:

1. Notasi Sigma dan sifat!sifatnya.
   a. Konsep Notasi Sigma
   b. Sifat!sifat Notasi Sigma
2. Barisan dan Deret
   a. Pengertian Barisan dan Deret
   b. Barisan dan Deret Aritmetika
   c. Barisan dan Deret Geometri

BAGIAN II

Notasi Sigma, Barisan dan Deret

A. Notasi Sigma

1. Konsep Notasi Sigma

Perhatikan jumlah 6 bilangan ganjil pertama berikut,

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 ………………………………….. (1)

Pada bentuk (1) 1 disebut suku pertama, 3 disebut suku ke-2, 5 disebut suku ke-3 dan seterusnya. Perhatikan juga suku-suku bentuk (1) tersebut membentuk pola.

Suku ke-***1*** = 1 = 2.***1*** – 1

Suku ke-***2*** = 3 = 2.***2*** – 1

Suku ke-***3*** = 5 = 2.***3*** – 1

Suku ke-***4*** = 7 = 2.***4*** – 1

Suku ke-***5*** = 5 = 2.***5*** – 1

Suku ke-***6*** = 7 = 2.***6*** – 1

Secara umum suku ke-k pada (1) dapat dinyatakan dalam bentuk 2k – 1 dengan k 0 { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Cara untuk menuliskan secara singkat bentuk jumlahan (1) adalah dengan tanda Σ (dibaca “sigma”) yang disebut dengan notasi sigma. Notasi sigma berasal dari huruf Yunani untuk abjad S dari perkataan “sum” yang berarti jumlah. Notasi ini diperkenalkan pertama kali oleh

Leonhard Euler pada tahun 1755 dalam buku “Institutiones Calculi Differentialis”.

Dengan notasi sigma bentuk jumlahan (1) dapat ditulis :

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11}_{\text{6 suku}} = \sum_{k=1}^{6}(2k+1)$$

Bentuk $\sum_{k=1}^{6}(2k+1)$ dibaca “sigma k=1 sampai 6 dari 2k – 1” atau “jumlah 2k – 1 untuk k = 1 sampai k = 6”. Pada notasi sigma di atas 1 dan 6 masing-masing disebut batas bawah dan batas atas, lambang k dinamakan indeks (ada pula yang menyebut k sebagai variable). Sebarang huruf kecil dapat digunakan sebagai indeks.

Secara umum $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n}$

Contoh :

1. $\sum_{k=1}^{5} 3k = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 3\cdot 4 + 3\cdot 5$

   $= 3 + 6 + 9 + 12 + 15$

2. $\sum_{k=1}^{4} (2n+1) = (2\cdot 1+1) + (2\cdot 2+1) + (2\cdot 3+1) + 2\cdot 4+1)$

   $= 3 + 5 + 7 + 9$

3. $\sum_{k=1}^{15} (2^k - 1) = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + (2^4 - 1) + ... + (2^{10} - 1)$

   $= 1 + 3 + 7 + 15 + ... + 1023$

Latihan 1

1. Nyatakan dengan menggunakan notasi sigma!

   a. $3 + 5 + 7 + \ldots + 51$

   b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

   c. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

   d. $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

   e. $9 + 27 + 81 + 243$

   f. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + 10000$

   g. $(2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) + (5 \times 6) + \ldots + (16 \times 17)$

   h. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ ... \ + a_n^2$

   i. $ab + a^2b^2 + a^3b^3 + a^4b^4 + \ldots + a^nb^n$

   j. $a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + \ \ldots \ + a^{10}b^9$

2. Nyatakan notasi sigma berikut ke dalam bentuk lengkap

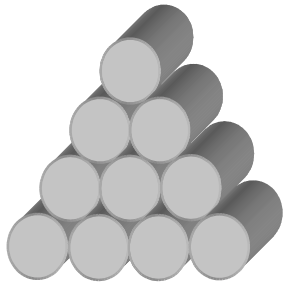
   a. $\sum_{k=1}^{5}(k^2 + 1)$

   b. $\sum_{n=1}^{5}(3n - 1)$

   c. $\sum_{i=1}^{6}(-1)^i a_i$

   d. $\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)}{2}$

3. Sebuah tumpukan pipa disusun membentuk segitiga sama sisi dengan n buah pipa pada tiap sisinya. Nyatakan banyaknya pipa dalam notasi sigma jika terdiri atas n tumpukan.



2. Sifat-sifat Notasi Sigma

Berikut ini adalah beberapa sifat notasi sigma.

a. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$

b. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$, c konstanta.

c. $\sum_{k=1}^{n} c.a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, c konstanta.

d. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum^{n} b_k$

e. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ dengan $1 < m < n$

f. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} x_{i-p}$

Contoh soal:

1. Buktikan dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma.

$$\sum_{x=1}^{n} (ax^2 + bx + c) = a\sum_{x=1}^{n} x^2 + b\sum_{x=1}^{n} x + cn$$

Jawab:

$$\sum_{x=1}^{n} (ax^2 + bx + c) = \sum_{x=1}^{n} ax^2 + \sum_{x=1}^{n} bx + \sum_{x=1}^{n} c$$

$$= a\sum_{x=1}^{n} x^2 + b\sum_{x=1}^{n} x + nc$$

2. Nyatakan $\sum_{k=8}^{20} \frac{2k}{k+1}$ dalam notasi sigma dengan 1 sebagai batas bawah.

Jawab:

Dengan menggunakan sifat $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} x_{i-p}$ diperoleh:

$$\sum_{k=8}^{20} \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=8-7}^{20-7} \frac{2(k-(-7))}{(k-(-7))+1} = \sum_{k=1}^{13} \frac{2(k+7)}{k+8}$$

<u>Latihan 2</u>

1. Buktikan sifat-sifat notasi sigma di atas!

2. Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n$

   Bentuk ruas kanan pada soal nomor 2 di atas disebut "Jumlah Monomial"

3. Nyatakan notasi sigma berikut ke dalam bentuk jumlah monomial

   a. $\sum_{k=1}^{n} (4a_k + 3b_k)$

   b. $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 4k)$

   c. $\sum_{j=1}^{10} (-1)^j (j^2 + 2j)$

   d. $\sum_{n=1}^{k} (n+1)^3$

4. Ubahlah notasi sigma berikut dengan bilangan 1 sebagai batas bawah.

   a. $\sum_{k=5}^{15} k$

   b. $\sum_{p=0}^{10} (2p+1)$

   c. $\sum_{a=-5}^{5} \frac{a+b}{a-b}$

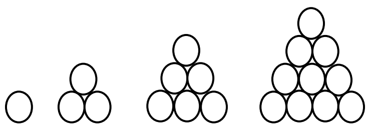
   d. $\sum_{k=8}^{30} (3k^2 + 1)$

B. Barisan dan Deret Bilangan

1. Pengertian Barisan

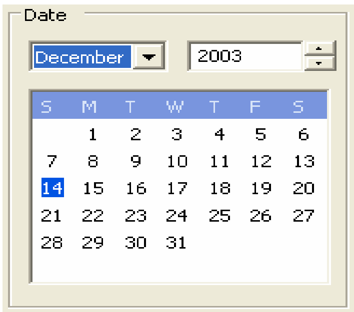
Perhatikan gambar dan urutan bilangan di bawah,

- Banyak lingkaran pada pola di bawah.



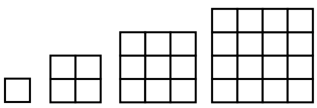
1, 3, 6, 10, 15, … ………………. (2)

- Urutan bilangan pada kolom ke-3 kalender.



2, 9, 16, 23, 30 ………………. (3)

- Banyak bujursangkar satuan pada urutan gambar berikut.



1, 4, 9, 16, 25, … ………..……….(4)

Urutan bilangan-bilangan pada (2), (3) dan (4) masing-masing mempunyai aturan tertentu. Urutan bilangan yang mempunyai aturan tertentu disebut barisan bilangan. Setiap bilangan pembentuk barisan disebut suku barisan. Dalam barisan secara umum suku pertama dinyatakan dengan U_1, suku ke-2 dinyatakan dengan U_2, suku ke-3 dinyatakan dengan U_3 dan seterusnya sehingga suku ke-n dinyatakan dengan U_n. Sebagai contoh pada barisan (2), $U_1 = 1$, $U_2 = 3$, $U_3 = 6$, $U_4 = 10$, dan seterusnya.

Barisan biasanya didefinisikan sebagai suatu fungsi yang mempunyai domain (daerah asal) bilangan asli. Pada barisan (2), fungsi untuk menyatakan suku ke-n barisan tersebut adalah $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$ dengan $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Pendefinisian seperti ini dinamakan dengan definisi eksplisit.

Cara lain untuk mendefinisikan barisan bilangan adalah dengan definisi rekursif. Contoh: diberikan barisan bilangan dengan definisi rekursif sebagai berikut,

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 3 \\ U_n = 2U_{n-1} + 1, \quad n > 1 \end{array}\right\}$$

Suku-suku berikutnya dapat dicari dengan cara :

$U_2 = 2.U_1 + 1 = 2.3 + 1 = 7$

$U_3 = 2.U_2 + 1 = 2.7 + 1 = 15$

$U_4 = 2.U_3 + 1 = 2.15 + 1 = 31$

dan seterusnya.

Sebuah definisi rekursif memuat dua bagian, pertama adalah kondisi awal untuk memulai barisan dan yang kedua adalah sebuah persamaan rekursif (rumus rekursif) untuk menentukan hubungan antara setiap suku barisan dengan suku berikutnya. Definisi rekursif ini banyak dipakai dalam aplikasi-aplikasi komputer.

2. Menentukan Rumus Suku ke-n Suatu Barisan

Jika suatu barisan diberikan beberapa suku pertama, kadang-kadang bisa ditentukan rumus untuk suku ke-n.

Contoh :

Tentukan rumus suku ke-n barisan berikut

a. 1, 3, 5, 7, …

b. 3, 9, 27, 81, …

Jawab :

a. $U_1 = 1 \quad = 2.\mathbf{1} - 1$

$U_2 = 3 \quad = 2.\mathbf{2} - 1$

$U_3 = 5 \quad = 2.\mathbf{3} - 1$

$U_4 = 7 \quad = 2.\mathbf{4} - 1$

…..

$U_n = 2.n - 1$

b. $U_1 = 3 \quad = 3^{\mathbf{1}}$

$U_2 = 9 \quad = 3^{\mathbf{2}}$

$U_3 = 27 \quad = 3^{\mathbf{3}}$

$U_4 = 81 \quad = 3^{\mathbf{4}}$

…..

$U_n = 3^n$

Perlu diperhatikan juga bahwa jawaban rumus suku ke-n tidak selalu tunggal, sebagai contoh barisan berikut.

2, 4, 8, …

Terlihat sekilas bahwa rumus suku ke-n barisan di atas adalah $U_n = 2^n$. Akan tetapi ternyata rumus $U_n = n^2 - n + 2$, juga sesuai untuk barisan diatas.

Tidak semua barisan dapat ditentukan rumus untuk suku ke-n. Sebagai contoh adalah barisan bilangan prima. Bilangan prima ke 100 bisa dicari, tetapi tidak ada rumus umum untuk menghasilkan bilangan prima ke-n.

Latihan 3

1. Carilah 4 suku pertama dan suku ke sepuluh dari barisan bilangan dengan rumus umum berikut.

   a. $U_n = 3n + 1$

   b. $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   c. $U_n = (n-1)(n-2)(n-3)$

   d. $U_n = \frac{n}{n+1}$

   e. $U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

2. Untuk setiap barisan bilangan berikut tentukan rumus untuk suku ke–n.

   a. 2, 4, 6, 8, 10, …
   b. 1, 2, 3, 4, 5, …
   c. –2, 1, 4, 7, 10, …
   d. $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \ldots$
   e. –15, –5, 5, 15, …
   f. 1, 2, 4, 8, 16, …
   g. $4,\ 2\sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{2},\ 1, \ldots$
   h. 2, –4, 8, –16, …
   i. 2, 6, 12, 20, …

3. Carilah lima suku pertama dari barisan dengan definisi rekursif berikut.

    a. $U_1 = 2$

       $U_n = 3(U_{n-1} - 1)$,   untuk $n > 1$

    b. $U_1 = -3$

       $U_n = (-1)^n \cdot (2U_{n-1} + 2)$, untuk $n > 1$

4. Carilah definisi rekursif untuk barisan bilangan berikut.

    a. 9, 13, 17, 21, …

    b. 1, 3, 7, 15, 31, …

    c. 81, 27, 9, 3, …

    d. 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

3. Deret Bilangan

Konsep tentang deret bilangan telah dikenal sejak abad ke-5 sebelum Masehi yang dikenal dengan nama paradoks Zeno. Dalam paradoks tersebut dikisahkan Achilles berpacu dengan kura-kura. Karena kecepatan Achilles 12 kali kecepatan kura-kura maka waktu start kura-kura diletakkan di depan Achilles sejauh 1 stadion (suatu ukuran jarak pada masa itu, kira-kira 200 yard). Untuk dapat melampaui kura-kura maka Achilles harus menempuh jarak 1 stadion terlebih dahulu (tempat kura-kura semula). Pada saat yang bersamaan kura-kura telah merangkak maju sejauh $\frac{1}{12}$ stadion. Saat Achilles menempuh jarak $\frac{1}{12}$ stadion, kura-kura telah bergerak maju $\frac{1}{12^2}$ stadion. Berikutnya saat Achilles menempuh jarak $\frac{1}{12^2}$ stadion, kura-kura telah bergerak maju sejauh $\frac{1}{12^3}$ stadion. Begitu seterusnya proses ini berulang-ulang sampai tak hingga sehingga disimpulkan bahwa Achilles tidak mungkin melampaui kura-kura.

Kalau dituliskan maka jarak yang ditempuh oleh Achilles adalah

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Tanda titik-titik ini menunjukkan bahwa pola tersebut berulang untuk setiap bentuk $\frac{1}{12^k}$ selalu diikuti oleh bentuk $\frac{1}{12^{k+1}}$.

Bentuk penjumlahan pada (5) dalam matematika dikenal sebagai deret bilangan atau dengan kata lain deret bilangan adalah penjumlahan dari barisan bilangan.

Jika S_n melambangkan jumlah dari n suku pertama suatu barisan bilangan maka S_n dapat dinyatakan dalam dua cara yaitu :

- Definisi eksplisit untuk S_n : $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$
- Definisi rekursif untuk S_n $S_1 = U_1$

  $S_n = S_{n-1} + U_n$ untuk $n > 1$

Dari sini diperoleh hubungan $\boxed{U_n = S_n - S_{n-1}}$ untuk $n > 1$

Contoh:

1. Jumlah n suku pertama suatu deret adalah $S_n = 2^n - 1$, tentukan U_1, U_2, U_3, U_4 dan U_5.

Jawab:

$U_1 = S_1 \quad = 2^1 - 1 \quad = 2 - 1 = 1$

$U_2 = S_2 – S_1 \quad = (2^2 - 1) - (2^1 - 1) = 3 - 1 = 2$

$U_3 = S_3 - S_2 = (2^3 - 1) - (2^2 - 1) = 7 - 3 = 4$

$U_4 = S_4 - S_3 = (2^4 - 1) - (2^3 - 1) = 15 - 7 = 8$

$U_5 = S_5 - S_4 = (2^5 - 1) - (2^4 - 1) = 31 - 15 = 16$

2. Hitung jumlah 5 suku pertama dari setiap deret bilangan jika diketahui rumus suku ke–n berikut.

   a. $U_n = 2n + 3$

   b. $U_n = n^2 + 2$

   c. $U_n = \log 10^n$

   Jawab:

   a. $S_5 = (2.1 + 3) + (2.2 + 3) + (2.3 + 3) + (2.4 + 3) + (2.5 + 3)$

      $= 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45$

   b. $S_5 = (1^2 + 2) \quad + (2^2 + 2) + (3^2 + 2) + (4^2 + 2) + (5^2 + 2)$

      $= 3 + 6 + 11 + 18 + 27 = 65$

   c. $S_5 = \log 10^1 + \log 10^2 + \log 10^3 + \log 10^4 + \log 10^5$

      $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Cara lain untuk menentukan jumlah n suku pertama deret adalah dengan mencari pola dari barisan S_1, S_2, S_3, S_4, …, S_n. Sebagai contoh pada contoh 2a di atas,

$S_1 = 5$	$= 5$	$= 1.5$	$= 1.(1 + 4)$
$S_2 = 5 + 7$	$= 12$	$= 2.6$	$= 2.(2 + 4)$
$S_3 = 5 + 7 + 9$	$= 21$	$= 3.7$	$= 3.(3 + 4)$
$S_4 = 5 + 7 + 9 + 11$	$= 32$	$= 4.8$	$= 4.(4 + 4)$

….

$S_n = n(n+4)$

Latihan 4

1. Tentukan bentuk umum jumlah n suku pertama dari setiap deret bilangan berikut.
   a. $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$
   b. $4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$
   c. $-5 - 3 - 1 + 1 + 3 + \ldots$
   d. $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + \ldots$
   e. $6 + 10 + 14 + 18 + 22 + \ldots$
2. Tulislah tiga suku pertama dan suku ke sepuluh dari setiap deret bilangan berikut.
   a. $S_n = n^2 + 2n$
   b. $S_n = n^3 - 2$

C. Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Misalkan U_n menyatakan suku ke-n suatu barisan, maka barisan itu disebut barisan aritmetika jika $U_n - U_{n-1}$ selalu tetap untuk setiap n.

$U_n - U_{n-1}$ yang selalu tetap ini dinamakan beda dan dilambangkan dengan b.

Jadi : $\boxed{b = U_n - U_{n-1}}$

Contoh :

2, 6, 10, 14, … beda = 6 – 2 = 10 – 6 = 14 – 10 = 4

10, 3, -4, -11, … beda = 3 – 10 = –4 – 3 = –11 – (–4) = –7

2. Suku ke-n Barisan Aritmetika

Misalkan a adalah suku pertama barisan aritmetika, b adalah beda dan U_n adalah suku ke-n,

$$U_n - U_{n-1} = b \Rightarrow U_n = U_{n-1} + b$$

$$U_{\mathbf{2}} = U_1 + b \quad = a + b \quad = a + \mathbf{1}b$$

$$U_{\mathbf{3}} = U_2 + b \quad = (a + b) + b \quad = a + \mathbf{2}b$$

$$U_{\mathbf{4}} = U_3 + b \quad = (a + 2b) + b \quad = a + \mathbf{3}b$$

$$U_{\mathbf{5}} = U_4 + b \quad = (a + 3b) + b \quad = a + \mathbf{4}b$$

$$U_{\mathbf{6}} = U_5 + b \quad = (a + 4b) + b \quad = a + \mathbf{5}b$$

………

sehingga $\boxed{U_n = a + (n-1)b}$

Nama barisan aritmetika diberikan karena setiap suku (kecuali suku pertama) dari barisan ini merupakan rata-rata aritmetik dari suku sebelum dan sesudahnya. Dengan kata lain untuk setiap U_k, dengan k ≥ 2 berlaku $U_k = \frac{U_{k-1} + U_{k+1}}{2}$.

3. Deret Aritmetika

Rumus untuk menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dibuat berdasarkan metode yang dipakai oleh matematikawan Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ketika ia masih kecil. Dikisahkan suatu ketika salah satu guru Gauss menyuruh murid–muridnya untuk menghitung jumlah 100 bilangan asli yang pertama, atau 1 + 2 + 3 + 4 + … + 100.

Murid–murid yang lain di kelas memulai dengan menjumlah bilangan satu per satu, tetapi Gauss menemukan metode yang sangat cepat. Ia menuliskan jumlahan dua kali, salah satunya dengan urutan yang dibalik kemudian dijumlahkan secara vertikal.

$$\begin{array}{rrrrrrl} 1\ + & 2\ + & 3\ + & \ldots\ + & 99\ + & 100 & \\ 100\ + & 99\ + & 98\ + & \ldots\ + & 2\ + & 1 & \\ \hline 101\ + & 101\ + & 101\ + & \ldots\ + & 101\ + & 101 & + \end{array}$$

Dari jumlahan ini diperoleh 100 suku yang masing–masing bernilai 101, sehingga 1 + 2 + 3 + … + 100 = $\frac{100 \times 101}{2}$ = 5050.

Jika a adalah suku pertama deret aritmetika, U_n suku ke-n, S_n jumlah n suku pertama dan b = beda maka rumus untuk jumlah n suku pertama deret aritmetika bisa dicari dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (U_n-2b) + (U_n-b) + U_n \\ S_n = U_n + (U_n-b) + (U_n-2b) + \ldots + (a+2b) + (a+b) + a \\ \hline 2S_n = \underbrace{(a+U_n) + (a+U_n) + (a+U_n) + \ldots + (a+U_n) + (a+U_n)}_{\text{n suku}} \end{array}$$

$2S_n = n(a + U_n)$

$$\boxed{S_n = \frac{n(a + U_n)}{2}}$$

karena $U_n = a + (n - 1)b$ maka $\boxed{S_n = \frac{n[2a + (n-1)b]}{2}}$

Contoh:

1. Tentukan suku ke–20 barisan bilangan berikut :

   a. 2, 5, 8, 11, …

   b. 9, 6, 3, 0, …

   Jawab :

   a. $b = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 3$

      $a = 2$

      $U_n = a + (n-1)b$

      $U_{20} = 2 + (20-1)3 = 2 + 19.3 = 63$

   b. $b = 6 - 9 = 3 - 6 = 0 - 3 = -3$

      $a = 9$

      $U_n = a + (n-1)b$

      $U_{20} = 9 + (20-1).-3 = 9 + 19(-3) = 9 - 57 = -48$

2. Suku ke –10 suatu barisan aritmetika adalah 24, sedangkan suku pertamanya 6. Tentukan :

   a. beda

   b. rumus suku ke–n

   Jawab :

a. $U_{10} = 24$, $a = 6$

$U_n = a + (n-1)b$

$24 = 6 + (10-1)b$

$24 - 6 = 9b$

$18 = 9b$

$b = 2$

b. $U_n = a + (n-1)b$

$U_n = 6 + (n-1)2$

$U_n = 4 + 2n$

3. Diketahui suatu barisan aritmetika dengan $U_2 = 6$ dan $U_{11} = 24$
   a. Carilah suku pertama dan beda
   b. Tentukan U_{40}
   c. Hitung jumlah 40 suku pertama dari deret aritmetika yang bersesuaian

Jawab:

a. $U_2 = 6$ $U_{11} = 24$

$a + b = 6$ ….. (1) $a + 10b = 24$ ….. (2)

(2) dan (1)

$$\begin{array}{rl} a + 10b &= 24 \\ a + b &= 6 \\ \hline 9b &= 18 \\ b &= 2 \end{array} \quad -$$

$a + b = 6$

$a + 2 = 6$

$a = 4$

Suku pertama 4, beda 2

b. Suku ke-40 dicari dengan rumus $U_n = a + (n-1)b$

$U_{40} = 4 + (40-1).2 = 4 + 39.2 = 82$

c. $S_n = \dfrac{n(a + U_n)}{2}$

$$S_{40} = \frac{40(4 + U_{40})}{2} = \frac{40(4 + 82)}{2} = 20(86) = 1720$$

<u>Latihan 5</u>

1. Tentukan rumus umum setiap barisan aritmetika berikut dan tentukan suku ke-25.
   a. 10, 15, 20, 25, …
   b. 2, –1, –4, –7, …
   c. 8, 14, 20, …
2. Tentukan n (banyak suku) dari barisan aritmetika berikut.
   a. 6, 3, 0, … , 81
   b. 20, 18, 16, … , -98
   c. 5, 10, 15, 20, …, 205
3. Tentukan beda, suku pertama dan rumus umum suku ke-n barisan aritmetika berikut ini jika diketahui:
   a. $U_4 = 17$ dan $U_7 = 29$
   b. $U_2 = 11$ dan $U_9 = 32$

c. $U_3 + U_5 = 60$ dan $U_4 + U_7 = 81$

4. Tentukan banyaknya bilangan asli yang merupakan kelipatan 5 antara 21 dan 99
5. Hitunglah deret aritmetika berikut ini:
   a. $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots$ (sampai 12 suku)
   b. $20 + 23 + 26 + 29 + \ldots$ (sampai 15 suku)
   c. $100 + 95 + 90 + 85 = \ldots$ (sampai 16 suku)
6. Diketahui suatu barisan aritmetika dengan suku ke-3 adalah 12 dan suku ke-6 adalah 27. Tentukan jumlah 20 suku pertama.
7. Tentukan jumlah 25 bilangan asli pertama yang habis dibagi 4.
8. Tentukan jumlah semua bilangan asli kurang dari 100 yang tidak habis dibagi 5.
9. Tiga bilangan membentuk deret aritmetika, jumlah ketiga bilangan itu 30, hasil kalinya 840. Tentukan bilangan-bilangan itu.
10. Suatu perusahaan, pada bulan pertama berdiri memproduksi sebanyak 1000 unit barang. Kenaikan produksi pada bulan-bulan berikutnya adalah $\frac{1}{5}$ kali produksi pada bulan pertama. Tentukan jumlah produksi selama satu tahun.

D. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Misalkan U_n menyatakan suku ke-n suatu barisan, maka barisan itu disebut barisan geometri jika $U_n : U_{n-1}$ selalu tetap untuk setiap n. $U_n : U_{n-1}$ yang selalu tetap ini dinamakan rasio dan dilambangkan dengan r.

Sehingga $\boxed{\dfrac{U_n}{U_{n-1}} = r}$

Contoh :

1, 3, 9, 27, … rasio = 3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 3

16, –8, 4, –2, … rasio = –8 : 16 = 4 : –8 = –2 : 4 = $-^1/_2$

2. Suku ke-n barisan geometri

Misalkan a adalah suku pertama barisan geometri, r adalah rasio dan U_n adalah suku ke-n,

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r \quad \Rightarrow \quad U_n = U_{n-1}r$$

$$\begin{aligned}
U_2 &= U_1.r &&= ar &&= ar^1\\
U_3 &= U_2.r &&= (ar)r &&= ar^2\\
U_4 &= U_3.r &&= (ar^2)r &&= ar^3\\
U_5 &= U_4.r &&= (ar^3)r &&= ar^4
\end{aligned}$$

…….

Sehingga $\boxed{U_n = ar^{n-1}}$

Barisan dengan sifat ini disebut barisan geometri karena untuk setiap U_k dengan $k \geq 2$ merupakan rata-rata geometrik dari suku sebelum dan sesudahnya. Dengan kata lain untuk $k \geq 2$ berlaku $U_k = \sqrt{U_{k-1}.U_{k+1}}$.

3. Deret geometri

Jika S_n adalah jumlah n suku pertama, r adalah rasio dan a adalah suku pertama suatu deret geometri, maka :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$\underline{rS_n = \quad ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n} \text{ (semua ruas dikali r)} \; -$$

$$S_n - rS_n = a + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 - ar^n$$

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

4. Deret Geometri Tak Hingga

Contoh deret geometri tak hingga:

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ $\qquad r = \frac{1}{2}$

b. $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \ldots$ $\qquad r = -\frac{1}{3}$

Perhatikan kembali rumus jumlah n suku pertama deret geometri

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Untuk nilai -1 < r < 1, jika n mendekati tak hingga ($n \to \infty$) maka r^n mendekati nol, sehingga

$$S_n = \lim \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

1. Pada paradoks Zeno, tentang Achilles dan kura-kura yang dibicarakan di depan, tentukan jawaban yang benar setelah menempuh jarak berapa Achilles melampaui kura-kura ?

   Jawab : Jarak yang ditempuh Achilles $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots$ stadion.

   $a = 1$

$$r = \frac{1}{12} : 1 = \frac{1}{12^2} : \frac{1}{12} = \frac{1}{12^3} : \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{11}{12}} = \frac{12}{11} \text{ stadion.}$$

2. Ubah bentuk decimal berulang berikut ke dalam pecahan

   a. 0,33333…

   b. 0,353535…

   Jawab :

   a. 0,33333… = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + …

      a = 0,3

      r = 0,03 : 0,3 = 0,003 : 0,03 = 0,0003 : 0,003 = 0,1

      $0{,}33333\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$

   b. 0,35353535… = 0,35 + 0,0035 + 0,000035 + …

      a = 0,35

      r = 0,0035 : 0,35 = 0,000035 : 0,0035 = 0,01

      $0{,}35353535\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}35}{1-0{,}01} = \frac{0{,}35}{0{,}99} = \frac{35}{99}$

Latihan 6

1. Tentukan bentuk umum dari barisan berikut:

   a. 64, 16, 4, …

   b. 3, 9, 27, 81, …

   c. 1, –3, 9, –27, 81, …

   d. $6,\ 9,\ 13\frac{1}{2},\ 20\frac{1}{4},\ \ldots$

e. 1000, –100, 10, –1, …

2. Tentukan lima suku pertama dari setiap barisan geometri berikut jika diketahui:

    a. $a = 4$ dan $r = 2$

    b. $U_3 = 27$ dan $U_7 = 2187$

    c. $U_2 = 512$ dan $U_8 = 8$

    d. $U_6 = -4$ dan $U_8 = -1$

    e. $a = 2\sqrt{3}$ dan $U_4 = 18$

3. Tentukan x jika 2, 8, 3x + 5 membentuk barisan geometri

4. Hitunglah jumlah setiap deret geometri berikut:

    a. 1 + 2 + 4 + 8 + … (sampai 12 suku)

    b. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$ (sampai 6 suku)

    c. 1 – 3 + 9 – 27 + … (sampai 8 suku)

    d. $\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + ... + 64$

5. Untuk derat $1 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2} + \sqrt[2]{5^3} + ...$, buktikan bahwa $S_{15} = \dfrac{3124}{5^{\frac{1}{3}} - 1}$

6. Rumus suku ke–n suatu deret geometri adalah $U_n = 2.4^{\frac{1}{2}(n-1)}$, hitunglah:

    a. Suku pertama dan rasio deret geometri tersebut.

    b. Rumus jumlah n–suku pertama.

7. Tiap tanggal 1 Januari, mulai 1 Januari 2000 Amir menabung uang di bank sebesar Rp 100.000,00. Jika bank memberikan bunga 10%

per tahun, tentukan besar uang Amir di bank pada tanggal 31 Desember 2003.

8. Suatu deret geometri tak hingga mempunyai suku pertama 12 dan jumlah tak hingganya 8. Tentukan rasionya.
9. Populasi penduduk sebuah kota pada tahun 1960 adalah 30.000 jiwa. Populasi ini meningkat dua kali lipat tiap 10 tahun. Berapa perkiraan populasi kota tersebut pada tahun 2010.

BAGIAN III

KESIMPULAN

1. Notasi sigma (Σ) digunakan untuk menyingkat bentuk jumlahan yang suku-sukunya mempunyai pola. Beberapa sifat dari notasi sigma diberikan di halaman 6.
2. Suatu barisan adalah fungsi yang mempunyai daerah asal himpunan bilangan bulat positif. Sebuah barisan bisa didefinisikan dengan cara eksplisit atau rekursif.
3. Suatu barisan disebut barisan aritmetik jika selisih dari setiap dua suku yang berurutan bernilai tetap, selisih ini dinamakan beda (b). Suatu barisan disebut barisan geometri jika rasio (r) dari setiap dua suku yang berurutan bernilai tetap.
4. Suku ke-n barisan aritmetik dirumuskan sebagai: $U_n = a + (n-1)b$ sedangkan untuk barisan geometri suku ke-n dirumuskan sebagai $U_n = ar^{n-1}$
5. Deret merupakan jumlahan dari suku-suku suatu barisan. Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah $S_n = \dfrac{n(2a + (n-1)b)}{2}$ atau $S_n = \dfrac{n(a + U_n)}{2}$. Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$ atau $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ untuk $r \neq 1$.

6. Suku ke-n barisan aritmetik dirumuskan sebagai: $U_n = a + (n - 1)b$

Suku ke-n barisan aritmetik dirumuskan sebagai: $U_n = a + (n - 1)b$

Deret geometri tak hingga mempunyai limit jumlah jika $-1 < r < 1$.

Rumus jumlah sampai tak hingga deret geometri adalah $S_\infty = \dfrac{a}{1 - r}$.

DAFTAR PUSTAKA

Brown, Richard G.. (1994). *Advanced Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Gellert, W.. (1977). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Haryadi, Muh.. (2002). *Bahan Ajar Matematika SMK*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Keedy, Mervin Laverne. (1983). *Algebra and Trigonometry*. California: Addison-Wesley Publishing Company.

Miller, Charles David. (1978). *Mathematical Ideas*. Glenview Illinois: Scott Foresman and Company.

Prawiro, Justine Yudho. (2000). *Matematika IPA*. Jakarta: Widya Utama.

Raharjo, Marsudi. (2001). *Notasi Sigma dan Induksi Matematika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Kunci Jawaban:

Latihan 1

1. a. $\sum_{n=1}^{25}(2n+1)$ b. $\sum_{k=1}^{5}(\frac{1}{2})^k$ c. $\sum_{j=1}^{6}2^j$

   d. $\sum_{p=1}^{6}-(-2)^p$ e. $\sum_{n=1}^{4}3^{n+1}$ f. $\sum_{n=1}^{100}n^2$

   g. $\sum_{n=1}^{15}(n+1)(n+2)$ h. $\sum_{j=1}^{n}a_j^2$ i. $\sum_{p=1}^{n}a^p b^p$

   j. $\sum_{n=1}^{10}a^n b^{n-1}$

2. a. 2 + 5 + 10 + 17 + 26 b. !1 + 2 + 5 + 8 + 11 + 14

   c. !a_1 + a_2 ! a_3 + a_4 !a_5 + a_6 d. $\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+...+\frac{n(n+1)}{2}$

3. $\sum_{p=1}^{n}p$

Latihan 2

3. a. $4\sum_{k=1}^{n}a_k+3\sum_{k=1}^{n}b_k$ b. $3\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k$

   c. $\sum_{j=1}^{10}(-1)^j j^2+2\sum_{j=1}^{10}(-1)^j j+4\sum_{j=1}^{10}(-1)^j$

   d. $\sum_{n=1}^{k}n^3+3\sum_{n=1}^{k}n^2+\left(3\sum_{n=1}^{k}n\right)+k$

4. a. $\sum_{k=1}^{11}(k+4)$ b. $\sum_{a=1}^{11}\frac{a-6+b}{a-6-b}$

   c. $\sum_{p=1}^{11}(2p-1)$ d. $\sum_{k=1}^{23}(3(k-7)^2+1)$

Latihan 3

1. a. $4, 7, 10, 13$; $U_{10} = 31$
   b. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; $U_{10} = \frac{1}{10}$
   c. $0, 0, 0, 6$; $U_{10} = 504$
   d. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ $U_{10} = \frac{10}{11}$
   e. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ $U_{10} = -\frac{1}{512}$
2. a. $U_n = 2n$ b. $U_n = n$ c. $U_n = 3n!5$
   d. $U_n = \dfrac{x^n}{n}$ e. $U_n = 10n ! 25$ f. $U_n = 2^{n!1}$
   g. $U_n = 4\sqrt{2}(2^{-\frac{n}{2}})$ h. $U_n = !(!1)^n 2^n$ i. $U_n = n^2 + n$
   j. $Un = n^2 ! 1$
3. a. $2, 3, 6, 15, 42$ b. $!3, !4, 6, 14, !30$
4. a. $U_1 = 9,$ $U_n = U_{n!1} + 4$
   b. $U_1 = 1,$ $U_n = U_{n!1} + 2^{n!1}$
   c. $U_1 = 81,$ $U_n = \dfrac{U_{n-1}}{3}$
   d. $U_1 = 1,$ $U_n = U_{n!1} + n$

Latihan 4

1. a. $S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ b. $S_n = 4(2^n ! 1)$ c. $S_n = n(n!4)$
   d. $S_n = 3^n ! 1$ e. $S_n = 2n(n + 2)$
2. a. $3, 5, 7,$ $U_{10} = 21$ b. $!1, 7, 19,$ $U_{10} = 271$

Latihan 5

1. a. $U_n = 5n + 5$ b. $U_n = 5 ! 3n$ c. $U_n = 6n+2$
2. a. $n = 30$ b. $n = 60$ c. $n = 41$
3. a. $a = 5,$ $U_n = 4n + 1$ b. $a = 8,$ $U_n = 5 + 3n$
   c. $a = 9,$ $U_n = 2 + 7n$
4. 15

5. a. $S_{12} = 300$ b. $S_{15} = 615$ c. $S_{16} = 1000$

6. 990

7. 1300

8. 4000

9. 6, 10, 14

10. 25.200

Latihan 6

1. a. $U_n = \dfrac{256}{4^n}$ b. $U_n = 3^n$ c. $Un = \dfrac{(-3)^n}{-3}$

   d. $U_n = 4(\tfrac{3}{2})^n$ e. $U_n = \dfrac{-10.000}{(-10)^n}$

2. a. 4, 8, 16, 32, 64
   b. 3, 9, 27, 81, 243 atau 3, !9, 27, !81, 243
   c. 1024, 512, 256, 128, !64 atau !1024, 512, !256, 128, !64
   d. !8$\sqrt{2}$, !8, !4$\sqrt{2}$, !4, !2$\sqrt{2}$ atau 8$\sqrt{2}$, !8, 4$\sqrt{2}$, !4, 2$\sqrt{2}$
   e. $2\sqrt{3}$, 6, $6\sqrt{3}$, 18, $18\sqrt{3}$
3. $x = 9$
4. a. $S_{12} = 4095$ b. $S_6 = \dfrac{364}{243}$ c. $S_8 =$!1640

   d. $n = 12$, $S_{12} = 126 + 63\sqrt{2}$
6. a. $a = 2$, $r = 2$
   b. $S_n = 2(2^n$! $1)$
7. Rp 510.510
8. $r =$!1/2
9. 480.000